Bac 2022 Sénégal

Séries : S1-S1A-S3

Épreuve du 1er groupe
Durée : 4 heures
Coefficient : 8

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe $\mathbb{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe 1.

1. Soient f l'application du plan dans lui-même définie par $f = t_{2\overrightarrow{OA}} \circ S_O \circ S_{(OA)}$ où $S_{(OA)}$ est la réflexion d'axe (OA), S_O la symétrie centrale de centre O et $t_{2\overrightarrow{OA}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $f(\text{M}) = \text{M}'$.

- **a)** Donner l'écriture complexe de $t_{2\overrightarrow{OA}}$, puis les expressions analytiques de S_O et de $S_{(OA)}$. **0,75 pt**
- **b)** En déduire que l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$. **0,5 pt**
- **c)** Montrer que $z' = -\overline{z} + 2$. **0, 25 pt**
- **d)** Montrer que f est une isométrie puis déterminer l'écriture complexe de sa réciproque. **0,5 pt**
- **e)** Déterminer l'ensemble E des points invariants par f. **0,5 pt**
- **f)** En déduire la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f. **0,5 pt**

2. On désigne par O' l'image de O par $t_{2\overrightarrow{OA}}$. Soient (D_1) la droite passant par O dont un vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$ est tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{e_1}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ et (D_2) la parallèle à (D_1) passant par O'.

a) Déterminer une équation cartésienne de (D_2) et l'ordonnée du point Ω d'abscisse 1 de (D_2). **0,5 pt**

b) Sans utiliser l'écriture complexe de $f \circ S_{(D_2)}$, déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de la transformation $f \circ S_{(D_2)}$ où $S_{(D_2)}$ est la réflexion d'axe (D_2). **0,5 pt**

c) Soit g l'application du plan dans lui-même définie par $g = r_{O'} \circ t_{2\overrightarrow{OA}}$ où $r_{O'}$ est la rotation de centre O' et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

i. Sans utiliser l'écriture complexe de g, donner la nature g. **0,5 pt**

ii. A tout point M d'affixe z, on pose $M' = g(M)$ et z' l'affixe de M'.

Montrer que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$, puis déterminer les éléments géométriques caractéristiques de g. **0,5 pt**

Exercice 2 (4 points)

PARTIE A

On considère l'équation (E) : $7x - 3y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Déterminer le réel a tel que le couple $(1\ , a)$ soit solution de (E). **0,25 pt**
2. Résoudre (E). **0,5 pt**

PARTIE B

Dans cette partie on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls solutions de l'équation: $7^n - 3 \times 2^m = 1$ **(F).**

1. Montrer que si le couple (n, m) est solution de **(F)** alors il existe un entier naturel k tel que : $7^{n-1} = 1 + 3k$ et $2^m = 2 + 7k$. **0,5 pt**
2. Montrer que si $m \leq 4$ alors l'équation **(F)** a deux couples solutions. **0,25 pt**
3. On suppose maintenant $m \geq 5$.

   a) Montrer que si le couple (n, m) est solution de **(F)** alors : $7^n \equiv 1[32]$ et $2^m \equiv 0[32]$. **0,5 pt**

   b) Compléter le tableau suivant. **0,5 pt**

n est égal à	1	2	3	4	5
7^n	$\equiv$ ... [32]	$\equiv$ ... [32]	$\equiv$ ... [32]	$\equiv$ ... [32]	$\equiv$ ... [32]

   c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation **(F)**, alors n est divisible par 4. **0,5 pt**

   d) Montrer que si le couple (n, m) est solution de **(F)** alors $7^n \equiv 1[5]$. **0,5 pt**

   e) Montrer alors que pour $m \geq 5$, il n'existe pas de couple (n, m) d'entiers naturels non nuls solution de **(F).** **0,25 pt**

4. Déterminer alors l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls qui sont solutions de **(F)**. **0,25 pt**

Problème (11 points)

PARTIE A (02,5 points)

Soit a un réel strictement positif. On désigne par g_a une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée g'_a vérifiant les propriétés suivantes :

(P₁) Pour tout nombre réel x, $\left(g'_a(x)\right)^2 - a^2\left(g_a(x)\right)^2 = -1$;

(P₂) $g'_a(0) = 0$;

(P₃) g'_a est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe une fonction g_a vérifiant les propriétés **(P₁), (P₂) et (P₃).**

a) Calculer $g_a(0)$. **0,25 pt**

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul, $g'_a(x) \neq 0$. **0,5 pt**

c) En utilisant la propriété **(P₁)** montrer que pour tout réel x non nul, on a : $g''_a(x) = a^2 g_a(x)$. **0,5 pt**

d) En déduire que pour tout réel x, $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$. **0,75 pt**

2. Montrer que la fonction g_a définie par $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ où a est un réel strictement positif est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée g'_a vérifie les propriétés **(P₁), (P₂) et (P₃).** **0,5 pt**

PARTIE B (02,5 points)

Soient a un réel strictement positif, f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \ln\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}\right)$ et (C_a) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier la parité de f_a, ses variations et établir son tableau de variations. **1,5 pt**

2. Etudier les branches infinies de (C_a). **0,5 pt**

3. Tracer la courbe (C_1). **0,5 pt**

PARTIE C (03,75 points)

1. Montrer que pour tout réel x, on a :

   a) $|f_1'(x)| < 1$. **0,5 pt**

   b) $f_1''(x) = 1 - [f_1'(x)]^2$ $\quad(\boldsymbol{E_1})$ **0,5 pt**

2. Montrer que pour tout $y \in]-1\,,1[$, l'équation $f_1'(x) = y$ admet une solution unique notée t_y puis exprimer t_y en fonction de y. **1 pt**

Pour tout $y \in]-1\,,1[$, on pose, pour tout entier naturel n : $\mathrm{I}_n(y) = \int_0^{t_y}(f_1'(u))^n du$.

On convient que pour tout réel u, $(f_1'(u))^0 = 1$.

3. On suppose ici que $y \in [0\,,1[$.

   a) Justifier que $\mathrm{I}_n(y)$ existe. **0,25 pt**

   b) Calculer $\mathrm{I}_0(y)$ et $\mathrm{I}_1(y)$. **0,75 pt**

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq \mathrm{I}_n(y) \leq t_y \times y^n$. **0,5 pt**

   d) En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n(y))_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite. **0,25 pt**

PARTIE D (02,5 points)

1. En utilisant la relation $(\mathbf{E_1})$, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathrm{I}_{n+2}(y) = \mathrm{I}_n(y) - \frac{1}{n+1}y^{n+1} \qquad (\mathbf{E_2}).$$ **0,5 pt**

2. En déduire que pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$\begin{cases} \mathrm{I}_{2p}(y) = t_y - \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{2q+1}y^{2q+1} & (\mathbf{E_3}) \\ \mathrm{I}_{2p+1}(y) = f_1(t_y) - \sum_{q=1}^{p}\frac{1}{2q}y^{2q} & (\mathbf{E_4}) \end{cases}.$$ **1 pt**

3. Montrer que tout $y \in]-1\,,1[$, $t_{-y} = -t_y$ · **0,5 pt**

4. Pour tout réel y de l'intervalle$]-1\,,1[$ et pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{J}_n(y) = \int_{t_{-y}}^{t_y}[f_1'(u)]^n du$.

   Montrer que si n est pair, $\mathrm{J}_n(y) = 2\mathrm{I}_n(y)$ et que si n est impair, $J_n(y) = 0$. **0,5 pt**